MPSI 1 - DS 1 - 29/09/2022

Consignes générales :

- L'ordre est indifférent, mais on séparera clairement les exercices ;
- il est conseillé de tous les aborder (difficulté progressive dans un exercice).
- Toute question, même qualitative, appelle une réponse argumentée.
- La qualité de la rédaction (*français* et *écriture mathématique*) sera notée.
- La qualité de la présentation également : soin, aération, $\boxed{\text{résultats encadrés}}$.
- Une application numérique sans unité explicite et appropriée ne sera pas prise en compte.
- Pour le nombre de chiffres significatifs à conserver pour le résultat final, on s'aligne sur la donnée la moins précise, avec au moins 2 chiffres significatifs (sauf indication contraire).

1- EXPLOITATION DE DONNÉES

Le cyclohexène (C_6H_{10}, noté A) réagit avec le chlorure d'hydrogène (HCl, noté B) pour former du chlorocyclohexane ($C_6H_{11}Cl$, noté C) ; la réaction est donc symbolisée par $A + B \rightarrow C$.

On met en présence A et B à $t = 0$, et on mesure la vitesse d'apparition de C, définie par $v = \frac{\mathrm{d}[C]}{\mathrm{d}t}$, exprimée en mol·L^{-1}·s^{-1}. Le tableau suivant donne les valeurs de vitesses initiales pour différentes valeurs des concentrations initiales de A et B.

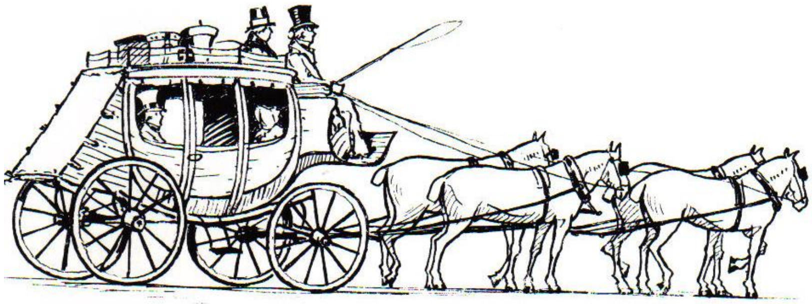
expérience n° :	1	2	3	4
$[A]_0$ (mmol/L)	470	470	470	313
$[B]_0$ (mmol/L)	235	328	448	448
v_0 (µmol·L^{-1}·s^{-1})	15.7	30.6	57.1	38.0

1) On postule que la vitesse de cette réaction vérifie à tout instant : $v = k[A]^p[B]^q$, où p et q sont deux entiers naturels et k une constante à valeurs positives.
   - Déduire p de la comparaison des expériences (3) et (4), puis q des expériences (1) et (2).
   - En déduire l'unité de la constante k.
2) Calculer la valeur de k pour chaque expérience.
   En déduire une valeur moyenne avec trois chiffres significatifs.
3) Dans le cas où $[A]_0 = [B]_0 = a$, la théorie prévoit que si l'on pose $[C] = c(t)$, on a :
$$\frac{1}{([A](t))^2} = \frac{1}{(a - c(t))^2} = \frac{1}{a^2} + 2kt.$$
   Exprimer littéralement le temps de demi-réaction τ, défini par $c(\tau) = a/2$.
   Faire l'application numérique (A.N.) pour $a = 470$ mmol/L ; adapter l'unité du résultat final.
4) Transformer la relation donnée en une relation affine $y = \alpha + \beta t$.
   Tracer la droite qui s'en déduit à partir des valeurs fournies ci-dessous, et vérifier la cohérence de la valeur de k associée avec la valeur calculée précédemment.

t (min)	0	30	60	120	180	240	300	360
$[A](t)$ (mol/L)	0,47	0,37	0,33	0,27	0,24	0,21	0.19	0.18
y								

5) Quelle est la durée théorique de disparition de A ? À quelle date la concentration initiale a est-elle divisée par 1000 ? Donner le résultat dans une unité “parlante”.

2- EFFET STROBOSCOPIQUE



Dans une scène de western, une diligence est filmée avec une caméra prenant 24 images par seconde. Ses roues, d'un mètre de diamètre, comportent 12 rayons identiques.

1) Le projecteur fournit 24 images par seconde, soit la même cadence qu'à la prise de vue. Pour quelle(s) vitesse(s) de la diligence (en km/h) les roues paraissent-elles immobiles ?

2) À partir de la situation précédente, qu'observe-t-on si l'on projette à raison de 18 images par seconde : le mouvement de la diligence est-il accéléré ou ralenti ? Les roues tournent-elles ou non ?

3) Le film est diffusé à la télévision, à 25 images par seconde ; quelles en sont les conséquences ?

3- ONDE PROGRESSIVE

En un point O de la surface d'une eau tranquille, on fait tomber une succession régulière de gouttes d'eau à la cadence de 90 exactement par minute.

1) Décrire l'aspect de la surface de l'eau, qualitativement et quantitativement, sachant que la vitesse de propagation des ondes à la surface de l'eau est v = 60,0 cm·s^{-1}.

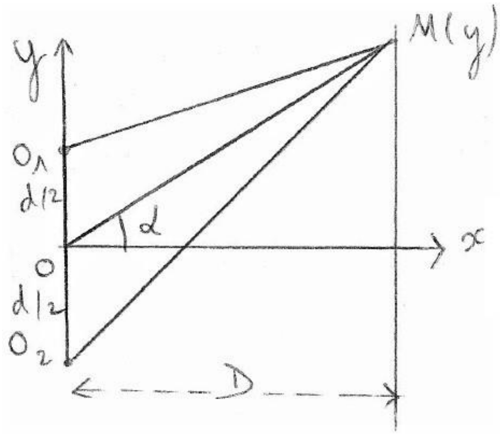
2) Un bouchon de liège M, distant de d du point O, effectue des oscillations d'amplitude a. En admettant que ce mouvement soit sinusoïdal, donner l'expression littérale de l'élongation $y_{\mathrm{M}}(t)$ de M par rapport à sa position d'équilibre si le mouvement de O est : $y_0(t) = a_0 \cos \omega t$.

3) Donner l'expression numérique de $y_{\mathrm{M}}(t)$, sous la forme la plus simple possible, si a = 0,75 cm et d = 60,0 cm. Qualifier le déphasage des oscillations de M par rapport à O.

4) Quelle est à chaque instant la différence des phases, en degrés, entre le mouvement pris par un autre bouchon de liège M' placé à la distance OM' = 86 cm de la source, et celui de M ?

4- INTERFÉRENCES

Deux sources émettent des ondes radio se propageant dans le plan de la surface terrestre. Les sources sont placées en O_1 et O_2, distants de d sur un axe Oy. Elles émettent de manière parfaitement synchrone un même signal sinusoïdal de pulsation ω, d'amplitude a, et on a $d = \lambda/2$.



La distance D étant fixée, le point M repéré par sa coordonnée y (origine en O) ou par l'angle α que fait OM avec la médiatrice de O_1O_2.

1) Exprimer les distances O_1M et O_2M, en fonction de D, d, y.

Sachant que D est très grand devant d et que l'angle α reste très faible, déterminer une expression approchée de la différence de chemin parcouru par les signaux provenant des 2 sources et arrivant en M, en fonction de λ et α.

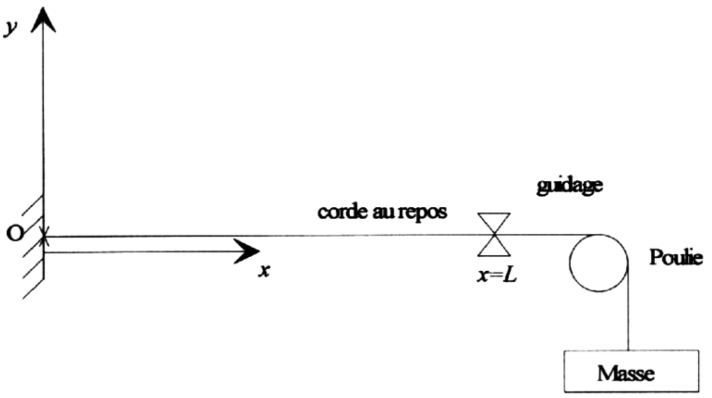
On rappelle que $(1+u)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}u$ lorsque $|u| \ll 1$.

2) En déduire l'amplitude du signal reçu en M.

3) Dans quelle(s) direction(s) l'amplitude du signal reçu en M est-elle maximale ? Minimale ?

5- ONDE STATIONNAIRE

Corde vibrante (d'après Banque PT- 1999) – Solutions stationnaires de l'équation d'onde



On considère une corde homogène, confondue au repos avec l'axe Ox, inélastique, de masse linéique μ, tendue avec une tension uniforme et constante T par une masse pesante, par l'intermédiaire d'une poulie (figure ci-contre).

La corde est fixée au point O et un guidage impose $y(L,t)=0 \ \ \forall t$.

On étudie les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy, autour de la position de repos. L'élongation à l'instant t de tout point M d'abscisse $x \in [0, L]$ est notée $y(x,t)$.

<u>**1.** Équation de propagation</u>.

On admet que l'équation différentielle couplant l'évolution temporelle et spatiale d'une onde transverse progressant dans la corde s'écrit $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ avec $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$. (1)

1.1 Quelle est la dimension de la constante c ainsi définie ?

1.2 A.N. : Calculer μ et c pour une corde d'acier de masse volumique $\rho = 7{,}2.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, de rayon 1 mm et soumise à une tension $T = 3000 \text{ N}$.

1.3 Montrer que $A\cos(kx \pm \omega t)$ est solution de l'équation (1) ssi $k = \omega/c$. Que représente c ?

<u>**2.** Recherche de solutions de l'équation d'onde sous forme d'ondes stationnaires</u>.

On cherche les solutions de l'équation de propagation sous la forme d'ondes stationnaires $y(x,t) = f(x).g(t)$, avec : $f(x) = a_1 \sin(kx + \varphi_1)$ et $g(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$.

2.1. Que peut-on dire de l'élongation en x = 0 et x = L, à chaque instant ? En déduire $f(0)$ et $f(L)$.

2.2. Montrer que la longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ de l'onde stationnaire ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes λ_n que l'on exprimera en fonction de L et n.

2.3. En déduire que ω ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes ω_n, avec n entier positif.

Exprimer ω_n en fonction de L , n et c.

2.4. A chaque valeur de ω_n correspond un « mode propre » d'onde stationnaire. Le mode n = 1 est appelé mode *fondamental*. Les modes correspondant à n supérieur à 1 sont les *harmoniques*.

Exprimer l'élongation $y_n(x,t)$ du mode d'indice n et donner une représentation graphique de la corde en mouvement, à un instant donné, pour les trois premiers harmoniques.

MPSI 1 - DS 1 - 29/09/2022

1- EXPLOITATION DE DONNÉES

1) En tout début de réaction, on a $v_0 = k[A]_0{}^p[B]_0{}^q$, et on a l'idée de ne faire varier qu'une des deux concentrations entre deux expériences, ce qui permettra d'éliminer les grandeurs constantes (connues ou non), en faisant **le rapport de deux vitesses initiales** :

$$\frac{v_{0,3}}{v_{0,4}} = \frac{[A]_{0,3}{}^p}{[A]_{0,4}{}^p} \Longrightarrow \frac{57.1}{38.0} = \left(\frac{470}{313}\right)^p$$

On en déduit la valeur de p en arrondissant à l'entier le plus proche : $\boldsymbol{p = 1}$.

En procédant de même entre les expériences (1) et (2), on obtient : $\boldsymbol{q = 2}$.

$v = k[A]^p[B]^q$ en mol·L^{-1}·s^{-1} donne l'unité de k : mol$^{1-(p+q)}$·L$^{(p+q)-1}$·s^{-1} soit ici : **mol^{-2}·L^{2}·s^{-1}**.

2) On calcule k pour chaque expérience en prenant garde aux unités des données :

expérience n° :	1	2	3	4
k en **10^{-4}·mol^{-2}·L^2·s^{-1}**	6.05	6.05	6.05	6.05

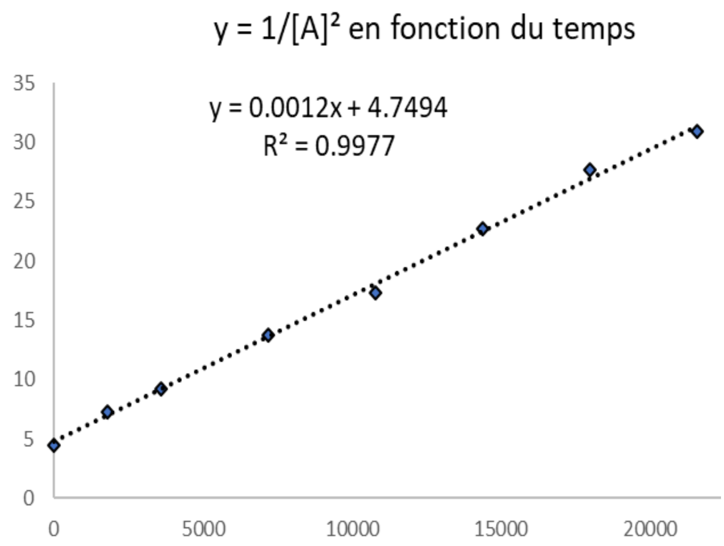
Les résultats étant parfaitement cohérents, on retiendra $\boldsymbol{k \approx 6.05 \cdot 10^{-4}}$ **mol^{-2}·L^2·s^{-1}**.

3) Le temps de demi-réaction τ vérifie $\frac{1}{(a-a/2)^2} = \frac{1}{a^2} + 2k\tau$, d'où $\boldsymbol{\tau = \frac{3}{2ka^2}}$ (homogénéité OK).

A.N. : $\boldsymbol{\tau \approx 11.2 \cdot 10^3}$**s $\approx$ 187 min $\approx$ 3h 07min.**

4) Il convient de poser $y = \frac{1}{(a-c(t))^2}$ pour avoir $y = \alpha + \beta t$ avec $\alpha = \frac{1}{a^2}$ et $\beta = 2k$.

Le graphique obtenu est en accord avec ce modèle (ci-contre).



En prenant la moitié de la pente, on trouve $6 \cdot 10^{-4}$, ce qui est comparable à la valeur de k obtenue par ailleurs.

5) Comme $[A](t) \to 0$ quand $t \to \infty$, la durée théorique de la réaction est infinie. Mais en pratique, on ne percevra plus d'évolution des concentrations au bout d'un "certain temps".
   Par exemple, $[A](t) < a/1000$ pour :
   $t > \boldsymbol{\frac{999}{2ka^2} = 333\,\tau \approx 1038}$ **h $\approx$ 43 jours.**

2- STAGECOACH

1) Les roues paraissent immobiles si, pendant un intervalle de temps $\Delta t = \frac{1}{24}$ s, un rayon est remplacé par un autre ; il faut pour cela que la roue ait tourné de p douzièmes de tours, avec $p \in \mathbb{N}$.

Le nombre de tours par seconde, c'est-à-dire la *fréquence de rotation*, est donc $f = \frac{p/12}{1/24} = 2p$ tours/s.

NB : le "tour" n'ayant pas de dimension, on a bien des s^{-1} pour f.

Pour un tour de roue, la diligence avance d'une circonférence de celle-ci, soit πD si D est le diamètre.

Sa vitesse par rapport au sol est donc $v_p = 2p\,\pi D \approx 6{,}28\,p$ m/s ou $v_p \approx 22{,}6\,p$ km/h : seule la plus petite valeur est réaliste, soit $\boldsymbol{v_p \approx 22{,}6}$ **km/h**.

2) **Le film est ralenti** puisque moins d'images sont projetées dans la même durée. Mais comme les vues projetées sont les mêmes, **la roue reste apparemment fixe**.

3) **Le film est légèrement accéléré**, de 1/24ᵉ soit 4 % ; c'est ainsi que *La chevauchée fantastique* de John Ford durera 1h 32min à la télévision, au lieu de 1h 36min au cinéma.

Et **la roue apparaît toujours fixe** car **cela résulte de la cadence de prise de vue**, cf. Q2.

3- ONDE PROGRESSIVE - *corrigé*

1) Ondes circulaires concentriques, transverses (mouvement perpendiculaire à la surface).

La durée séparant deux gouttes est la **période** $\boldsymbol{T = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}}$ **s.**

Pendant cette durée, l'onde parcourt la distance entre deux sommets ou deux creux successifs, c'est la **longueur d'onde** $\boldsymbol{\lambda = vT = 40}$ **cm**.

2) L'onde reçue en M à la date t a été émise à la date $t' = t - \frac{d}{v}$; la pulsation est $\omega = \frac{2\pi}{T} = 3\pi$:

$$y_{\mathrm{M}}(t) = a\cos\omega\left(t - \frac{d}{v}\right) = a\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{d}{v}\right) = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right)$$

$$y_{\mathrm{M}}(t) = 0{,}75\cos 3\pi(t-1) = \boldsymbol{0{,}75\cos(3\pi t - 3\pi) = -0{,}75\cos 3\pi t}\ \text{(en cm)}$$

Un déphasage de $\pm\pi$ correspond à une demi-période : **opposition de phase**.

3) La différence de phase de M' par rapport à M est :

$$\varphi_{\mathrm{M'/M}} = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\mathrm{OM'}}{v} - \left(t - \frac{\mathrm{OM}}{v}\right)\right) = \left[3\pi\left(\frac{60\text{-}86}{60}\right)\right]\frac{180}{\pi} = -234°.$$

Comme ce retard est supérieur à une demi-période, on le convertit **en avance de 360-234=126°**.

4- INTERFÉRENCES - *corrigé*

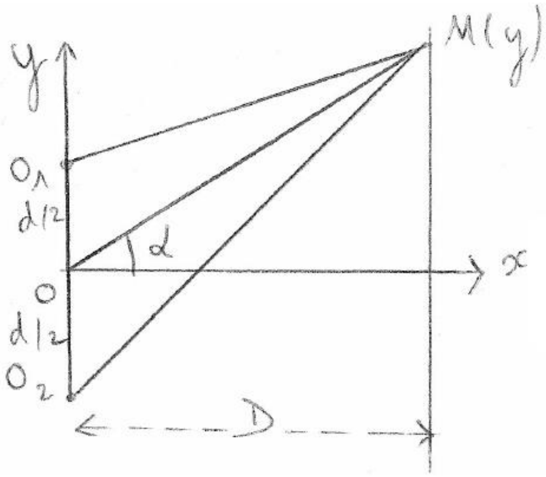
1)

$$\delta = O_2M - O_1M = \sqrt{D^2 + (y + d/2)^2} - \sqrt{D^2 + (y - d/2)^2}$$

$$= D\left[\left(1 + \frac{1}{D^2}(y + d/2)^2\right)^{1/2} - \left(1 + \frac{1}{D^2}(y - d/2)^2\right)^{1/2}\right]$$

$$= D\left[\frac{1}{2D^2}(y^2 + d^2/4 + yd) - \frac{1}{2D^2}(y^2 + d^2/4 - yd)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{yd}{D} = \frac{y\lambda}{2D} \approx \frac{\lambda \sin\alpha}{2}.$$



2) $s_1(t) = a\cos\omega t$ et $s_2(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$ $\Rightarrow$ $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$

$\Rightarrow \quad s(t) = 2a\cos\frac{\pi\delta}{\lambda}\cos(\omega t + \frac{\pi\delta}{\lambda})$. L'amplitude du signal reçu est donc $A = 2a\left|\cos\frac{\pi\delta}{\lambda}\right|$

3) L'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude : $I = I_o\cos^2\left(\frac{\pi\sin\alpha}{2}\right)$ est maximale dans la direction perpendiculaire à O_1O_2, et nulle dans la direction de O_1O_2.

Corde vibrante (d’après Banque PT- 1999)

1. Équation d'onde

1.1. Par homogénéité de l’équation (1), ou par analyse dimensionnelle de $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, ***c* est une vitesse**.

1.2. A.N. : $\mu = \pi(0,001)^2 \times 7200 = 0,226 \text{ kg.m}^{-1}$, $c = \sqrt{\dfrac{3000}{0,226}} = 364 \text{ m.s}^{-1}$.

1.3. Reportons $A\cos(kx \pm \omega t)$ dans (1) : $-k^2 A\cos(kx \pm \omega t) - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)A\cos(kx \pm \omega t) = 0$.

Ceci est vrai à tout instant et en tout point ssi $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, d’où $\boldsymbol{k = \frac{\omega}{c}}$ car ces trois grandeurs sont positives.

Cette relation, connue dans le cadre de la propagation des ondes périodiques et équivalente à $\lambda = cT$, confirme que c est la **célérité**, ou **vitesse de phase** de l’onde.

2. Recherche de solutions de l’équation d’onde sous forme d’ondes stationnaires

Solutions de (1) en $y(x,t) = f(x).g(t)$ avec $f(x) = a_1\sin(kx+\varphi_1)$ et $g(t) = a_2\sin(\omega t+\varphi_2)$.

2.1. Conditions aux limites de la corde : $y(0,t) = y(L,t) = 0\ \forall t \Rightarrow \boxed{f(0) = f(L) = 0}$.

2.2. On résout la condition limite précédente $\begin{cases} f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = a_1\sin(\varphi_1) \\ f(L) = 0 \Leftrightarrow 0 = a_1\sin(kL+\varphi_1) \end{cases}$, soit :

$\begin{cases} \sin(\varphi_1) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0[\pi], \text{ posons } \varphi_1 = 0 \\ \Rightarrow 0 = a_1\sin(kL) \Leftrightarrow kL = n\pi,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ ainsi $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$ et donc $\lambda_n = \dfrac{2\pi}{k_n} = 2\pi\dfrac{L}{n\pi} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \dfrac{2L}{n},\ n \in \mathbb{N}^*}$.

2.4. Pulsations ω_n des ondes stationnaires :

on a pour chaque n : $\omega_n = k_n c \Rightarrow \boxed{\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}}$.

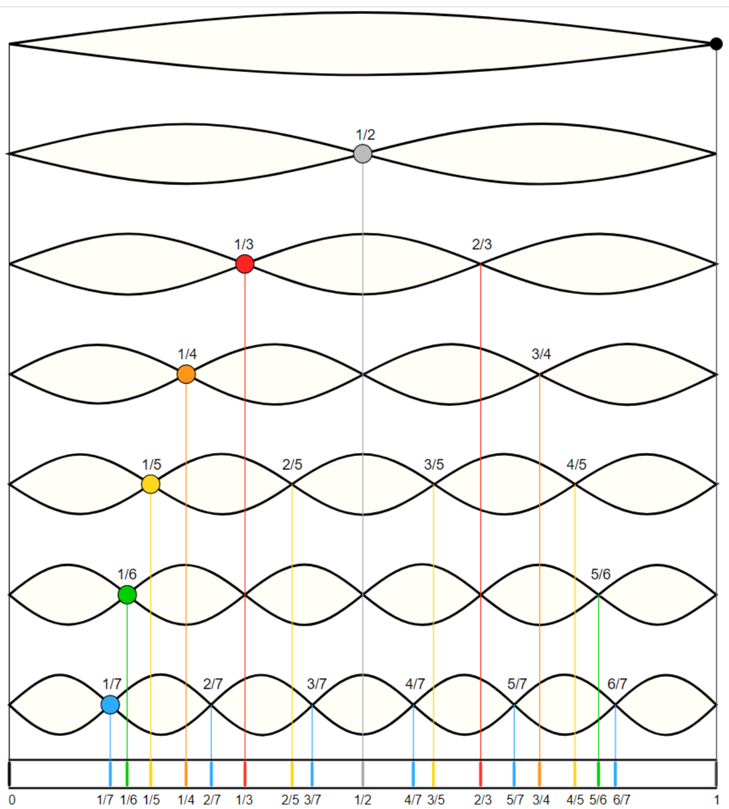
2.5. Modes propres :

$$y_n(x,t) = a_1\sin(k_n x+\varphi_1) \times a_2\sin(\omega_n t+\varphi_2),$$

soit :

$$y_n(x,t) = Y\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}+\varphi_2\right).$$

Les harmoniques d’une corde (wikipédia) :



— = FIN = —